E.N.S.T.I.M. ALES 1980

(I) 1 - Soit φ la fonction de la variable réelle x telle que :

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{Log} \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + \frac{1}{x-1}$$

a) Etudier les variations de φ.

b) Montrer que φ s'annule pour deux valeurs de x et deux seulement qu'on appellera α et β ; donner pour chacune d'elles une valeur approchée au 1/10 par défaut.

c) Déduire des résultats précédents le signe de $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine de définition.

2 - Soit f la fonction de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = x^2 \operatorname{Log} \left| 1 - \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2}$$

a) Déterminer un développement limité de f suivant les puissances de $X = \frac{1}{x}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité pour x = 0. Etudier la dérivabilité de f ainsi prolongée en ce point.

d) Exprimer $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sous forme de fractions rationnelles, respectivement en α et β. En déduire le signe de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$, puis en utilisant les résultats de la question 1b, des valeurs approchées de $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

e) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3 - Déterminer une fonction primitive F de f sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ où f est continue.

En déduire l'aire du domaine Δ défini par :

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$y \in [-x-1, f(x)]$$

4 - Montrer que f vérifie une relation de la forme :

$$P(x) \cdot f'(x) + Q(x) f(x) = R(x) \qquad (E)$$

P, Q, R étant des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à déterminer.

Si h est une fonction verifiant (E), déterminer la relation satisfaite par la fonction u telle que :

$$h(x) = u(x) \cdot f(x)$$

En déduire u, puis h.

(II) A - L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative à la base B est :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer par ses équations cartésiennes la droite vectorielle I des vecteurs invariants de f. Vérifier que $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ est un vecteur directeur de I.

2) On désigne par J le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$\vec{e'}_2 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{e'}_3 = \vec{e}_3.$$

a) déterminer une équation cartésienne de J.

b) vérifier que $(\vec{e'}_1 ; \vec{e'}_2 ; \vec{e'}_3)$ définit une nouvelle base B' de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en conclure pour I et J ?

3) a) déterminer la matrice H de passage de la base B à la base B' ainsi que son inverse H^{-1}.

b) on désigne par h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative à la base B est H. Donner la nature de h ainsi que les éléments qui le caractérisent.

4) a) déterminer la matrice F' de f relative à la base B'.

b) calculer la matrice F'^n ($n \in \mathbb{N}^*$). En déduire F^n.

1988

B - L'objet de cette partie est l'étude des suites recurrentes réelles définies par :

$$p_n = 3p_{n-1} + q_{n-1}$$

$$q_n = r_{n-1} - 3p_{n-1}$$

$$r_n = p_{n-1}$$

Les premiers termes étant $p_1 = 0$; $q_1 = 1$; $r_1 = 0$.

1) On pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_n = F\,X_{n-1}$ où F désigne la matrice définie précédemment dans la partie A)

2) Calculer X_n en fonction de X_1 et de F.

3) En utilisant les résultats établis au A) déterminer p_n ; q_n ; r_n en fonction de l'entier naturel n.
Que peut-on dire de la somme $p_n + q_n + r_n$?

C - On désigne par $(\mathcal{L}(E) ; + ; 0)$ l'anneau unitaire des endomorphismes d'un espace vectoriel réel E dont les éléments neutres respectifs sont désignés par ω et i.

Soit $g_t = i + t.\varphi + \frac{t^2}{2}.\varphi^2$ où φ désigne un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^3 = \omega$. On pose $G_t = \{ g_t ; t \in \mathbb{R} \}$
et $\overline{\phi}$ l'application telle que : $\overline{\phi} : \mathbb{R} \longrightarrow G_t$
$t \longmapsto g_t$

1) Montrer que $\overline{\phi}$ définit un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(G_t ; 0)$
En déduire la nature de $(G_t , 0)$ ainsi que le symétrique de g_t relatif à la loi 0 de composition des applications.

2) a) calculer $(g_t - i)^3$.

b) établir une relation du type :

$g_t^n = \alpha_n . g_t^2 + \beta_n . g_t + \gamma_n . i$ où les coefficients $\alpha_n , \beta_n , \gamma_n$ sont des nombres réels dépendants de l'entier positif n mais non de t que l'on déter- [illegible] en utilisant les résultats de la partie B)

N.B. : On rappelle que $(\mathcal{L}(E) ; + , \circ)$ est un espace vectoriel réel.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail